

## PROGRAMA OLIMPIADEI DE MATEMATICĂ

### - ETAPA LOCALĂ –

ANUL ȘCOLAR 2019 – 2020

- Pentru fiecare clasă, în programa de olimpiadă sunt incluse în mod implicit conținuturile programelor de olimpiadă din clasele anterioare.
- Cunoștințele suplimentare față de programa școlară pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă.

### Clasa a V-a

- Etapa locală

#### Numere naturale.

Operații cu numere naturale. Factorul comun. Teorema împărțirii cu rest. Reguli de calcul cu puteri. Compararea puterilor. Ultima cifră. Pătrate perfecte. Cuburi perfecte.

#### Metode aritmetice de rezolvarea problemelor

Metoda reducerii la unitate. Metoda comparației. Metoda figurativă. Metoda mersului invers. Metoda falsei ipotezei.

#### Divizibilitatea numerelor naturale

Divizor; multiplu; divizori comuni; multipli comuni. Criterii de divizibilitate cu: 2, 5,  $2^n$ ,  $5^n$ ,  $10^n$ , 3 și 9; numere prime; numere compuse.

### Clasa a VI-a

- În programa de olimpiadă sunt incluse, în mod implicit, conținuturile programelor de olimpiadă pentru disciplina matematică din clasele anterioare.
- În programa prevăzută pentru etapa națională sunt incluse, în mod implicit, conținuturile programelor de olimpiadă de la etapele anterioare.
- Conținuturile suplimentare față de programa școlară, marcate cu text înclinat în prezenta programă, pot fi folosite în rezolvarea problemelor de olimpiadă.

- Etapa locală

#### ALGEBRĂ

##### 1. Mulțimi

• Submulțimi. Cardinalul unei mulțimi. Operații cu mulțimi. Mulțimi finite și mulțimi infinite. *Principiul includerii și excluderii. Partiții. Principiul cutiei.*

- Mulțimea  $\mathbb{N}$ . Teorema fundamentală a aritmeticii. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c.. Proprietăți.
- $(a; b) \cdot [a; b] = a \cdot b$
- Dacă  $(a; b) = d$  atunci există  $x, y \in \mathbb{N}$  astfel încât  $(x; y) = 1$  și  $a = dx$ ,  $b = dy$ .
- Dacă  $[a; b] = m$  atunci există  $x, y \in \mathbb{N}$  astfel încât  $(x; y) = 1$  și  $m = ax$ ,  $m = by$ .

## 2. Rapoarte și proporții

- Rapoarte. Proporții. Procente. Șir de rapoarte egale. Mărimi direct și invers proporționale. Regula de trei simplă.
- Elemente de organizare a datelor. Grafice. Reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice. Probabilități.

## GEOMETRIE

### 1. Unghiuri

#### Geometrie

- Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri în jurul unui punct. Unghiuri suplementare, complementare, adiacente. Bisectoarea unui unghi.
- *Teorema directă și teorema reciprocă a unghiurilor opuse la vârf.*

### 2. Paralelism și perpendicularitate

- Drepte paralele. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă. Axioma paralelelor. Criterii de paralelism. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice.
- Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Distanța de la un punct la o dreaptă. Mediatoarea unui segment. Simetria față de o dreaptă. Aplicații practice.

### 3. Cercul

- Definiția cercului, construcție, elemente în cerc. Unghi la centru. Măsură. Poziția unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri.

## Clasa a VII-a

- Etapa locală

## ALGEBRĂ

### 1. Mulțimea numerelor reale

- Conținutul programei școlare
- Modulul unui număr real. *Proprietățile modulului.* Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real
- Reguli de calcul cu radicali. Raționalizarea numitorilor. *Formula radicalilor dubli și următoarele rezultate:*
  - a) Dacă  $a, b \in \mathbf{Q}^+$  și  $p, q \in \mathbf{Q}^+$  astfel încât  $p\sqrt{a} + q\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$ , atunci  $\sqrt{a} \in \mathbf{Q}$  și  $\sqrt{b} \in \mathbf{Q}$ .
  - b) Dacă  $a \in \mathbf{Q}^+$  și  $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ , atunci  $a + x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  și  $a \cdot x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ .
- *Elemente de calcul algebric. Formule de calcul prescurtat:*  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ,  
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

## GEOMETRIE

### 1. Patrulaterul

- Patrulaterul convex; suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex
- Paralelogramul: proprietăți; aplicații în geometria triunghiului: linie mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi
- Paralelograme particulare: dreptunghi, romb, pătrat; proprietăți
- Trapezul, clasificare, proprietăți; linia mijlocie în trapez; trapezul isoscel, proprietăți
- Perimetre și arii: paralelogram, paralelograme particulare, triunghi, trapez.

## Clasa a VIII-a

- Etapa locală

### ALGEBRĂ

#### 1. Numere reale

Partea întreagă și partea fracționară a unui număr real. Ecuații. Modulul unui număr real. Ecuații.

Intervale. Operații cu intervale. Raționalizarea numitorului de forma  $a\sqrt{b}$  și  $a \pm \sqrt{b}$

$a, b \in \mathbb{N}$ . Formulele de calcul prescurtat:  $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ ;  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ;

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ .

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ ;  $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$ .

Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Operații.

### GEOMETRIE

#### 1. Probleme elementare de loc geometric.

#### 2. Puncte, drepte, plane. Paralelism.

La conținutul programei școlare se adaugă: teoreme de paralelism; teorema lui Menelaos în spațiu; teorema reciprocă teoremei lui Menelaos; teorema lui Thales în spațiu; axe de simetrie ale paralelipipedului dreptunghic; axa de simetrie a piramidei patrulater regulate; simetria față de un plan; secțiuni axiale în corpurile care admit axe de simetrie.

#### 3. Proiecții ortogonale pe un plan

La conținutul programei școlare se adaugă: perpendiculara comună a două drepte; reciprocele teoremei celor trei perpendiculare; plan mediator; plan bisector.

## Clasa a IX-a

- Etapa locală

### ALGEBRĂ

#### 1. Mulțimi și elemente de logică matematică

Mulțimea numerelor reale: operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real, aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă, partea fracționară a unui număr real; operații cu intervale de numere reale.

Propoziție, predicat, cuantificatori.

Operații logice elementare (negație, conjuncție, disjuncție, implicație, echivalență), corelate cu operațiile și relațiile cu mulțimi (complementară, intersecție, reuniune, incluziune, egalitate, regulile lui De Morgan).

Tipuri de raționamente logice: inducția matematică. Probleme de numărare.

#### 2. Funcții definite pe mulțimea numerelor naturale (șiruri)

Modalități de a defini un șir, șiruri mărginite, șiruri monotone; exemple simple

Tipuri de șiruri: progresii aritmetice, progresii geometrice, formula termenului general în funcție de un termen dat și rație, suma primilor  $n$  termeni ai unei progresii.

Condiția ca  $n$  numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru  $n \geq 3$ .

Recurențe liniare de ordinul I și II.

#### 3. Noțiuni și rezultate suplimentare

*Inegalitatea mediilor. Inegalitatea Cauchy-Buniakovski. Inegalitatea lui Holder.*

*Inegalitatea lui Bernoulli. Inegalitatea lui Cebâșev.*

## GEOMETRIE

### 1. Vectori în plan

- Segment orientat, relația de echipolență, vectori, vectori coliniari.
- Operații cu vectori: adunarea (regula triunghiului, regula paralelogramului), proprietăți ale operației de adunare, înmulțirea cu scalari, proprietăți ale înmulțirii cu scalari, condiția de coliniaritate, descompunerea după doi vectori dați, necoliniari și nenuli.

### 2. Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană

- Vectorul de poziție al unui punct.
- Vectorul de poziție al punctului care împarte un segment într-un raport dat, teorema lui Thales (condiții de paralelism).
- Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi (concurența medianelor unui triunghi).
- Teorema bisectoarei, vectorul de poziție al centrului cercului înscris într-un triunghi; ortocentrul unui triunghi; relația lui Sylvester, concurența înălțimilor.
- Teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva.

### 3. Noțiuni și rezultate suplimentare

- *Teoreme de geometrie clasică. Teorema lui Stewart. Teorema lui Steiner. Dreapta lui Euler. Drepte de tip Simson.*
- *Puncte și linii importante în triunghi. Teoreme de concurență și coliniaritate. Relații metrice.*

## Clasa a X-a

- Etapa locală

## ALGEBRĂ

### Mulțimi de numere

- Numere reale: proprietăți ale puterilor cu exponent rațional, irațional și real ale unui număr pozitiv, aproximări raționale pentru numere iraționale sau reale.
- Radical dintr-un număr rațional,  $n \geq 2$ , proprietăți ale radicalilor.
- Noțiunea de logaritm, proprietăți ale logaritmilor, calcule cu logaritmi, operația de logaritmare.
- Mulțimea  $\mathbb{C}$ . Numere complexe sub forma algebrică, conjugatul unui număr complex operații cu numere complexe. Interpretarea geometrică a operațiilor de adunare și scădere a numerelor complexe și a înmulțirii acestora cu un număr real.
- Rezolvarea în  $\mathbb{C}$  ecuației de gradul al doilea cu coeficienți reali. Ecuații bipătrate.
- Numere complexe sub forma trigonometrică (coordonate polare în plan), înmulțirea numerelor complexe și interpretare geometrică, ridicarea la putere (formula lui Moivre).
- Rădăcinile de ordinul  $n$  ale unui număr complex. Ecuații binome.
- *Aplicații ale numerelor complexe în geometrie.*

### Funcții și ecuații

- Funcția putere cu exponent natural  
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{D}, f(x) = x^n$  și  $n \geq 2$ .
- Funcția radical  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $n \geq 2$ , unde  $\mathbb{D} = [0, \infty)$  pentru  $n$  par și  $\mathbb{D} = \mathbb{R}$  pentru  $n$  impar;
- Funcția exponențială  $f: \mathbb{R} \rightarrow (0; \infty), f(x) = a^x$ ,  $a \in (0; \infty), a \neq 1$  și funcția logaritmică  $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x$ ,  $a \in (0; \infty), a \neq 1$ , creștere exponențială, creștere logaritmică.
- Funcții trigonometrice directe și inverse.

- Ecuații iraționale.
- Ecuații exponențiale.
- Ecuații logaritmice.
- Ecuații trigonometrice.
- *Convexitate în sensul Jensen, inegalități deduse din convexitate.*

## Clasa a XI-a

- **Etapa locală**

### ***ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ SI GEOMETRIE ANALITICĂ***

#### **Permutări**

- Noțiunea de permutare, operații, proprietăți.
- Inversiuni, semnul unei permutări.
- Transpozitii; descompunerea unei permutari in produs de transpozitii

#### **Matrice**

- Tabel de tip matricial. Matrice, mulțimi de matrice.
- Operații cu matrice: adunarea, înmulțirea, înmulțirea unei matrice cu scalar, proprietăți.
- Puterile unei matrice: metode de calcul
- Relatia Cayley-Hamilton, utilizarea in metode de calcul a puterilor unei matrice

#### **Determinanți**

- Determinant de ordin  $n$ , proprietăți.
- Aplicații: ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte, aria unui triunghi și coliniaritatea a trei puncte în plan.
- Rangul unei matrice.

### ***ELEMENTE DE ANALIZA MATEMATICA***

#### **Limite de funcții**

- Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală: intervale, mărginire vecinătăți, dreapta încheiată, simbolurile  $+\infty$  și  $-\infty$ .
- Funcții reale de variabilă reală : funcția polinomială, funcția rațională, funcția putere, funcția radical, funcția logaritm, funcția exponențială, funcții trigonometrice directe și inverse.
- Limita unui șir utilizând vecinătăți, proprietăți.
- Șiruri convergente: intuitiv, comportarea valorilor unei funcții cu grafic continuu când argumentul se apropie de o valoare dată, șiruri convergente: exemple semnificative:  $(a^n)_n$ ,  $(n^a)_n$ ,  $((1+1/n)^n)_n$ , operații cu șiruri convergente, convergența șirurilor utilizând proprietatea Weierstrass. Numărul  $e$ ; limita șirului  $((1+u_n)^{1/u_n})_n$ ;  $u_n \rightarrow 0$ .
- Criteriul lui Cesaro-Stolz
- Șiruri remarcabile (Euler, Lalescu, Wallis, Stirling)
- Limite de funcții: interpretarea grafică a limitei unei funcții într-un punct utilizând vecinătăți, calculul limitelor laterale.
- Calculul limitelor pentru funcțiile studiate; cazuri exceptate la calculul limitelor de funcții :  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $\infty-\infty$ ,  $0\cdot\infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ .
- Asimptotele graficului funcțiilor studiate: asimptote verticale, oblice.

## Clasa a XII-a

### ***ELEMENTE DE ALGEBRA***

#### **Grupuri**

- Lege de compozitie internă, tabla operatiei.

- Grup, exemple: grupuri numerice, grupuri de matrice, grupuri de permutări,  $\mathbf{Z}_n$  ; ordinul unui element al unui grup ; teoremele lui Lagrange și Cauchy pentru grupuri ; condiții suficiente de comutativitate în grupuri.
- Morfism și izomorfism de grupuri.

### ***ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ***

- Probleme care conduc la noțiunea de integrală.
  - **Primitive**
    - Primitivele unei funcții. Integrala nedefinită a unei funcții continue, proprietatea de liniaritate a integralei nedefinite. Primitive uzuale.
- Metode de calcul a primitivelor : - schimbarea de variabilă
- calculul primitivelor unor funcții iraționale
  - calculul primitivelor funcțiilor trigonometrice și hiperbolice.
- **Integrala definită.**
- Conținutul programei școlare
- Sume Darboux, sume Riemann, integrabilitate*